

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 5

Unabhängige Teilbeobachtungen abhängiger Inputs

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 1)

Sind X_1 und X_2 unabhängig,
dann auch $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$.

Sind X_1 und X_2 unabhängig,

dann auch $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$.

Denn:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1, h_2(X_2) \in B_2) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1))\mathbf{P}(X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) \\ &= \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1)\mathbf{P}(h_2(X_2) \in B_2). \quad \square \end{aligned}$$

Durch den Übergang zu

“Teilbeobachtungen” $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$

können aber auch aus abhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2

voneinander unabhängige Zufallsvariable

$h_1(X_1), h_2(X_2)$ entstehen:

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen Zufallsvariablen**
können **unabhängig** sein:

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen** Zufallsvariablen
können **unabhängig** sein:

Beispiel:

(X_1, X_2) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \dots, 32\}$ ”.

Offenbar sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X_1 \in \{1, 9, 17, 25\}\}, \quad E_2 := \{1 \leq X_2 \leq 8\}.$$

sind unabhängig.

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen** Zufallsvariablen
können **unabhängig** sein:

Beispiel:

(X_1, X_2) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \dots, 32\}$ ”.

Offenbar sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X_1 \in \{1, 9, 17, 25\}\}, \quad E_2 := \{1 \leq X_2 \leq 8\}.$$

sind **unabhängig**.

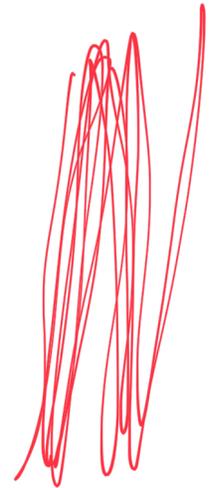
Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(\underline{E_1} \cap \underline{E_2}) = \frac{\underline{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}}{\underline{32 \cdot 31}} = \underline{\frac{1}{32}}.$$

Als Anknüpfung an Teil 1 der heutigen Vorlesung geben wir hier auch die Tafel der 4 Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2), \mathbf{P}(E_1 \cup E_2^c), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2^c):$$

	E_2	E_2^c
E_1	$\frac{1 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{1 \cdot 24 + 3 \cdot 23}{32 \cdot 31}$
E_1^c	$\frac{7 \cdot 7 + 21 \cdot 8}{32 \cdot 31}$	$\frac{7 \cdot 24 + 21 \cdot 23}{32 \cdot 31}$



Man sieht: Die Zeilen stehen im Verhältnis 1 : 7,
die Spalten stehen im Verhältnis 1 : 3.

Das kommt daher, dass der relative Anteil von $A_1 := \{1, 9, 17, 25\}$ in $A_2 := \{1, 2, \dots, 8\}$ ebenso groß ist wie der von A_1 in A_2^c .